**Квантова механіка. Фізичний факультет, 4 курс, 7 семестр.**

*Заняття* №13. ***Теорія збурень (ТЗ): нестаціонарна ТЗ.***

1. Підготовка до контрольної роботи. В роботі буде 3 завдання:

1. теоретичне питання з «Квантового мінімуму» (**3 бали**); 2. задача на обчислення комутатора (**3 бали**); 3. задача на одномірний рух (**4 бали**). Максимальна оцінка – **10 балів.**

2. Теорія збурень (закінчення).

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}; \quad \hat{H}_0 \psi_n^{(0)} = E_n^{(0)} \psi_n^{(0)};$$

$\hat{H}_0$ – основний гамільтоніан, для якого відомий точний розв'язок стаціонарного рівняння Шредінгера, $\hat{V}$ – оператор збурення.

$\dfrac{\partial \hat{V}}{\partial t} = 0$ – стаціонарна ТЗ (див. заняття № 12), $\dfrac{\partial \hat{V}}{\partial t} \neq 0$ – нестаціонарна ТЗ.

3. Нестаціонарна ТЗ.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q,t)}{\partial t} = \left( \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \right) \Psi(q,t);$$

$$\Psi(q,t) = \sum_k a_k(t) \Psi_k^{(0)}(q,t); \quad \Psi_k^{(0)}(q,t) = \psi_k^{(0)}(q) e^{-iE_k^{(0)} t/\hbar},$$

$$i\hbar \frac{da_m}{\partial t} = \sum_k V_{mk}(t) a_k, \qquad .$$

$$V_{mk}(t) = \left( \Psi_m^{(0)}, \hat{V} \Psi_k^{(0)} \right) = V_{mk} e^{i\omega_{mk} t}, \quad \omega_{mk} = \frac{E_m^{(0)} - E_k^{(0)}}{\hbar}$$

$$a_{kn} \approx \delta_{k,n} + a_{kn}^{(1)}(t), \quad a_{kn}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int V_{kn} e^{i\omega_{kn} t} dt.$$

3.1. Вірогідність переходу під впливом збурення, яке діє протягом скінченого часу,

$$w_{k \leftarrow n} = | a_{kn}^{(1)} |^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_{kn} e^{i\omega_{kn} t} dt \right|^2 .$$

**Задача 1.** На частинку, яка знаходиться при $t \to -\infty$ в основному стані в безкінечно глибокій ямі ширини $a\,(0 < x < a)$, накладається слабке однорідне поле, яке змінюється з часом згідно з законом $V(x,t) = -xF_0 e^{-t^2/\tau^2}$. Обчислити в першому порядку ТЗ вірогідності збудження різних станів частинки при $t \to \infty$. (ГКК № 8.23 (а))

4. Обговорення індивідуальних розрахункових завдань. Дані про спецфункції, що можуть бути корисними при виконанні цих завдань.

4.1. Гіпергеометрична функція.

Гіпергеометричний ряд (узагальнення поняття геометричної прогресії)

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1}z + \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)}{\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot 1\cdot 2}z^2$$
$$+\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot(\alpha+2)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot(\beta+2)}{\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot(\gamma+2)\cdot 1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \ldots;$$

Ряд збігається при $|z| \le 1$, є симетричним по $\alpha, \beta$. Ряд обривається, якщо $\alpha$ чи $\beta$ є цілим від'ємним числом. Це один з розв'язків гіпергеометричного рівняння

$$z(1-z)\frac{d^2U}{dz^2} + \left[\gamma - (\alpha+\beta+1)z\right]\frac{dU}{dz} - \alpha\beta U = 0.$$

Два лінійно незалежних розв'язки у випадку, коли $\gamma$ не є цілим числом,

$$U_1(z) = F(\alpha,\beta,\gamma,z);$$
$$U_2(z) = z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z).$$

Через гіпергеометричну функцію виражаються повні еліптичні інтеграли, інтеграли від циліндричних функцій, поліноми Лежандра, функції Лежандра, шарові функції та приєднані поліноми Лежандра, поліноми Чебишова, поліноми Якобі. Наприклад,

$$P_n(z) = \frac{(2n-1)!!}{n!}z^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}-n, \frac{1}{z^2}\right);$$
$$P_n(\cos\varphi) = F\left(n+1, -n, 1, \sin^2\varphi\right).$$

4.2. Вироджена гіпергеометрична функція.

Вироджений гіпергеометричний ряд

$$F(\alpha,\gamma,z)=1+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{z}{1!}+\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)}{\gamma\cdot(\gamma+1)}\cdot\frac{z^2}{2!}+\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot(\alpha+2)}{\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot(\gamma+2)}\cdot\frac{z^3}{3!}+\dots;$$

Ряд збігається при $|z|\leq 1$. Ряд обривається, якщо $\alpha$ є цілим від'ємним числом. Це один з розв'язків виродженого гіпергеометричного рівняння

$$z\frac{d^2U}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{dU}{dz}-\alpha U=0.$$

Якщо $\gamma$ не є цілим числом, то два лінійно незалежних розв'язки виродженого гіпергеометричного рівняння мають вигляд:

$$U_1(z)=F(\alpha,\gamma,z);$$
$$U_2(z)=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma,z).$$

Через вироджену гіпергеометричну функцію выражаются інтеграл вірогідності, інтеграли від циліндричних функцій, поліноми Ерміта, поліноми Лягера.

Докладніше про властивості гіпергеометричних функцій та вироджених гіпергеометричних функцій можна дізнатися в книжках: И.С.Градштейн, И.М.Рыжик «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений», А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев «Интегралы и ряды. Специальные функции. Т. 2», М.Абрамовиц, И.Стиган «Справочник по специальным функциям», а також в математичних доповненнях в підручнику «Квантовая механика» Л.Д.Ландау, И.М.Лифшица.

**Домашнє завдання** . ГКК 8.23(б, в)–8.26.

ЛЛ - Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика

ЕК - Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантова механика, 1976

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981